7/12/1…

ΟΡΙΣΜΟΣ: Ας είναι $A \subseteq \mathbb{R}$. Το A καλείται επαγωγικό σύν… αν
- $1 \in A$
- $\forall x \in A \Rightarrow x+1 \in A$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΕΠΑΓΩΓΙΚΩΝ ΣΥΝΟΛΩΝ

$[-5, +\infty)$

$\{1\} \cup \{n+\frac{1}{2}, n=1, \dots\} \cup \{n\}$

$\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$

ΟΡΙΣΜΟΣ: Ας είναι $\mathcal{N}$ η συλλογή όλων των επαγωγικών συνόλων του $\mathbb{R}$. Θέτουμε το $\mathbb{N} = \bigcap \mathcal{N}$.

ΠΡΟΤΑΣΗ: Το $\mathbb{N}$ είναι το ελάχιστο επαγωγικό σύνολο του $\mathbb{R}$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: $\forall A \in \mathcal{N} \Rightarrow 1 \in A$, $\forall A \in \mathcal{N} \Rightarrow 1 \in \bigcap \mathcal{N} = \mathbb{N}$ (I)

αν $x \in \mathbb{N} \Rightarrow x \in A \ \forall A \in \mathcal{N}$

$\Rightarrow x \in A \ \forall A$ επαγωγικό

$\Rightarrow x+1 \in A \ \forall A \in \mathcal{N}$

$\Rightarrow x+1 \in \bigcap \mathcal{N} = \mathbb{N}$

δηλ. $x \in \mathbb{N} \Rightarrow x+1 \in \mathbb{N}$, $\forall x \in \mathbb{N}$ (II)

Άρα $\mathbb{N}$ επαγωγικό

Αν A επαγωγικό ώστε $A \in \mathcal{N}$

$\Rightarrow \mathbb{N} = \bigcap \mathcal{N} \subseteq A$ Άρα $\mathbb{N}$ ελάχιστο

ΠΡΟΤΑΣΗ: $\forall x \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N}, x < n$ (Αρχιμήδεια ιδιό

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: Έστω ότι το συμπέρασμα δεν ισχύει.
Τότε $\exists x_0 \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}$ $n \leq x_0$ $\forall n \in \mathbb{N}$
Άρα το $\mathbb{N}$ είναι άνω φραγμένο $\subseteq \mathbb{R}$
Έπεται ότι $\exists \sup\mathbb{N} = s \in \mathbb{R}$

δηλ. είναι $n \leq \sup\mathbb{N}$ $\forall n \in \mathbb{N}$
Έπεται ότι $\mathbb{N}$ επαγωγικό, για $n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow n+1 \in \mathbb{N}$

άρα $n+1 \leq \sup\mathbb{N}$

δηλ. $n \leq \sup\mathbb{N} - 1, \forall n \in \mathbb{N}$

$\sup\mathbb{N}$ είναι άνω φράγμα του $\mathbb{N}$

$\Rightarrow \sup\mathbb{N} \leq \sup\mathbb{N} - 1$

$0 \leq -1$

ΠΡΟΤΑΣΗ: i) $x, y \in \mathbb{N} \Rightarrow x+y, x, y \in \mathbb{N}$

ii) $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}^+$

iii) $1 = \min\mathbb{N}$

iv) $0 \notin \mathbb{N}$

v) $\left.\begin{array}{l} n \in \mathbb{N} \\ n > 1 \end{array}\right\| \Rightarrow n-1 \in \mathbb{N}$

Απόδειξη: (i) Ας είναι $x, y \in \mathbb{N}$
Θεωρώ το σύνολο $A_x = \{y \in \mathbb{R} : x+y \in \mathbb{N}\}$

$x \in \mathbb{N} \Rightarrow x+1 \in \mathbb{N} \Rightarrow 1 \in A_x$

Αρκεί να αποδ. ότι το A_x είναι επαγωγικό

Ας είναι $y \in A_x$ τότε $x+y \in \mathbb{N} \Rightarrow \underbrace{x+y+1}_{=x+(y+1)} \in \mathbb{N}$ ($\mathbb{N}$ επαγωγ.)

Δηλ. $y+1 \in A_x$, άρα A_x επαγωγικό

(ii) Παρατηρώ ότι το $\mathbb{R}^+$ είναι επαγωγικό
άρα $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}^+$

(iii) Παρατηρώ ότι τα σύνολα $\{x \in \mathbb{R} : 1 \leq x\} \subseteq A$ είναι επαγωγικό με ελάχιστο στοιχείο του A

$\left.\begin{array}{l} \text{Είναι } \mathbb{N} \subseteq A \\ 1 \in \mathbb{N} \end{array}\right\} \Rightarrow 1$ ελαχ. στοιχείο του $\mathbb{N}$

(iv) $\left.\begin{array}{l} 0<1 \\ 1 \text{ είναι ελάχιστο του } \mathbb{N} \end{array}\right\} 0 \notin \mathbb{N}$

Αν υποθ. ότι $0 \in \mathbb{N}$ τότε επειδή $0<1 \Rightarrow 1$ όχι ελ. στοιχείο του $\mathbb{N}$, άτοπο!

v) Ας είναι $n \in \mathbb{N}$ με $n>1$

Ας είναι $S = \{1\} \cup \{n \in \mathbb{N} : n-1 \in \mathbb{N}\}$

Αρκεί ν.α.ο. ότι το S είναι επαγωγικό

Προφανώς $1 \in S$. Ας είναι $x \in S$. Θα αποδείξω ότι $x+1 \in S$

δηλ. ότι $(x+1)-1 \in \mathbb{N} \Rightarrow x+1 \in S$

Παρατηρώ ότι $S \subseteq \mathbb{N}$ (εκ κατασκευής) και S επαγωγικό $\Rightarrow$

$\mathbb{N} \subseteq S$. Άρα $\mathbb{N} = S$.

ΠΡΟΤΑΣΗ: Αν $m \in \mathbb{N}$ ώστε $\nexists\, x \in \mathbb{N} : m < x < m+1$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: ~~Ας είναι $m \in \mathbb{N}$~~ Ας θεωρώ το σύνολο

$A = \{n \in \mathbb{N} : \exists x \in \mathbb{N}$ με $n < x < n+1\} \subseteq \mathbb{N}$

αρκεί να αποδείξω ότι το A είναι το κενό σύνολο.

Ας είναι $z = \inf A$ (γιατί αφού το $A \subseteq \mathbb{N}$ είναι κάτω φραγμένο και επομένως έχει infimum)

Αν $n \in A$, ώστε $\exists x \in \mathbb{N} : n < x < n+1$

$n-1 < x-1 < n$

$x-1 = 0$ | $0 < x-1 \in \mathbb{N}$

$x = 1$

$\Rightarrow \exists n \in \mathbb{N} : n < 1$ | $n-1 \in A$

Άτοπο! | $z \le n-1$

$z+1 \le n, \ n \in A$

δηλ. το $z+1$ είναι κ.φ. του A

άρα $z+1 \le z$ / άτοπο!

$1 \le 0$